EXAMEN RESUELTO DE RACIONALES Y POLINOMIOS

1. Opera: $\frac{8^{-2}\cdot 24^2\cdot 15^3}{9^3\cdot 16^{-2}\cdot 3^{-3}}=\frac{\left(2^3\right)^{-2}\cdot\left(2^3\cdot 3\right)^2\cdot\left(3\cdot 5\right)^3}{\left(3^2\right)^3\cdot\left(2^4\right)^{-2}\cdot 3^{-3}}=\frac{2^{-6}\cdot 2^6\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot 5^3}{3^6\cdot 2^{-8}\cdot 3^{-3}}=3^2\cdot 5^3\cdot 2^8$

2. Halla el valor de x en cada caso:

   a) $\log_{11}\frac{1}{121}=x\Rightarrow 11^x=\frac{1}{121}\Rightarrow 11^x=11^{-2}\Rightarrow x=-2$

   b) $\log_x 5=\frac{1}{3}\Rightarrow x^{\frac{1}{3}}=5\Rightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=5^3\Rightarrow x=125$

   c) $\log_{\frac{1}{5}} x=-3\Rightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=x\Rightarrow 5^3=x\Rightarrow x=125$

3. En el apartado a) opera y simplifica. En el apartado b) racionaliza:

   a) $\frac{1}{5}\sqrt{125\frac{x}{y}}-3y\sqrt{\frac{x}{9y^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2y^{-2}}=\frac{1}{5}\sqrt{5^2\cdot 5\cdot\frac{x}{y}}-\frac{3}{3}\frac{y}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}=$

   $=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}=\left(\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{y}}$

   b) $\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}-1}=\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}-1}\cdot\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}+1}=\frac{\left(3\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 1+1^2}{9\cdot 3-1}=\frac{28+6\sqrt{3}}{26}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$

4. Simplifica la siguiente fracción polinómica: $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-7x-6}$

   Solución:

   Descomponemos el numerador y el denominador utilizando el método de Ruffini:

   a) Descomposición de $x^3+6x^2+11x+6$:

   Las posibles raíces de este polinomio son: $\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$. Probamos con -1 y -2:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 11 & 6\\ -1 & & -1 & -5 & -6\\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0\\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}\quad\Rightarrow(x+1)(x+2)(x+3)$$

   b) Descomposición de x^3-7x-6

   Las posibles raíces de este polinomio son: $\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$. Probamos con -1 y -2:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & -6\end{array}\quad\cancel{\Rightarrow(x+1)(x+2)(x-3)}$$

-1		-1	1	6
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	

Conclusión: $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-7x-6}=\frac{\cancel{(x+1)(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x+1)(x+2)}(x-3)}=\frac{x+3}{x-3}$

5. Opera y simplifica:

a) $$1+\frac{x-1}{x+1}-\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=1+\frac{x-1}{x+1}-\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{(x+1)^{\cancel{2}}}=1+\frac{x-1}{\cancel{x+1}}-\frac{\cancel{x-1}}{x+1}=1$$

b) $$\frac{\frac{x^2}{y}\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}-\frac{x}{y}=\frac{\frac{x^2}{y}-\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{y}}\frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2}}}{\frac{x^2-y^2}{xy}}-\frac{x}{y}=\frac{\frac{x^2-y^2}{y}}{\frac{x^2-y^2}{xy}}-\frac{x}{y}=\frac{x^2-y^2}{y}:\frac{x^2-y^2}{xy}-\frac{x}{y}=x-\frac{x}{y}$$

6. Calcula el valor de m y n para que el polinomio $P(x)=x^3-2x^2-mx+n$ sea divisible simultáneamente por $(x-5)$ y $(x+2)$

Solución:

Para que el polinomio sea divisible por $(x-5)$ y $(x+2)$ se tienen que cumplir las condiciones $P(5)=0$ y $P(-2)=0$. Es decir:

$$P(5)=5^3-2\cdot 5^2-5m+n=0$$
$$P(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-(-2)m+n=0$$

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son m y n. Resolviendo:

$$\left.\begin{aligned}-5m+n&=-75\\2m+n&=16\end{aligned}\right\}\Rightarrow m=13;n=-10$$

Conclusión:
El polinomio buscado es $P(x)=x^3-2x^2-13x-10$

****